Эффект домино

Андрей Тоом

Я – русский математик с международным опытом исследований и преподавания. Я немало преподавал в России и США, а также участвовал в образовательных проектах. В последнее время живу в Бразилии, где уже прочитал несколько университетских курсов. На основе этого опыта могу описать одно печальное явление, повторяющееся в математическом образовании разных стран. Назову его «эффектом домино».

Что такое эффект домино? Если вы поставите доминошки в ряд на столе, то, толкнув одну, сможете повалить все. В образовании это явление имеет несколько версий. Жёсткая версия: в каждом курсе некоторые ученики не справляются, потому что плохо учились на предыдущих курсах, а потому не справятся и с будущими курсами. Мягкая версия: каждый курс сводится к тривиальностям, потому что предыдущие курсы были тривиализованы, а тогда и со следующими курсами будет то же самое.

Может учитель в одиночку остановить феномен домино? Остановить не может, может только смягчить. Представьте, что вы начинаете преподавать курс и обнаруживаете, что ваши ученики плохо подготовлены. Что вы можете сделать? Думаю, что в таком случае необходимо начать с повторения тех тем, которые ваши ученики должны знать, но не знают. К сожалению, это повторение может отнять столько времени, что его не хватит для того курса, который вы должны преподать. Последствия: способные студенты не работают в полную силу и не получают от курса того, что могли бы. Начиная новый курс, они ожидают встретить что-то новое, но вместо этого вынуждены выслушивать повторения, в которых не нуждаются. Когда учитель, наконец, добирается до нового материала, уже нет времени чтобы разобрать его полностью. Слабые студенты учатся немножко здесь, немножко там, но всегда наспех и поэтому глубоких знаний так и не получают. Общество не может доверять дипломам, потому что не знает, получает ли компетентных специалистов.

Феномен домино поражает различные предметы, но особенно опасен в преподавании математики, где порядок предметов крайне важен. В преподавании географии Азия может идти до или после Америки, но в преподавании математики алгебра не может идти до арифметики. Более того, чтобы изучать алгебру недостаточно выполнять арифметические операции, необходимо ещё и решать арифметические задачи. Чтобы изучать калькулюс, необходимо знать всю школьную математику, включая алгебру и геометрию и прорешать немало задач. Чтобы изучать статистику, необходимо уметь обращаться с непрерывными случайными переменными, что можно делать только на основе калькулюса, и порешать достаточно задач на исчисление вероятностей, некоторые из которых достаточно сложны. Вся математика – это лестница (или система лестниц), где подниматься можно только шаг за шагом, закрепляя приобретённые знания на каждом уровне. Каждый из этих шагов включает не только запоминание но и понимание, мышление и решение задач.

Бразильский пример (мягкая версия): Читая курс случайных процессов, я начал с проверки того, знакомы ли студенты с теорией матриц. Оказалось, что совсем незнакомы.

Затем я проверил, знают ли они теорию комплексных чисел, например, могут ли решить уравнение $z^3=1$. Оказалось, что не могут. В виду всего этого я начал курс с комплексных чисел, их геометрического представления и решения уравнений, используя геометрические соображения. Затем, перешёл к матрицам и вычислению собственных значений и векторов и только в середине семестра начал цепи Маркова.

Американский пример (мягкая версия): несколько раз я преподавал «абстрактную алгебру» в одном университете. В первый раз включил классические темы: группы, кольца, поля. Студенты были вежливы, но безразличны. Я думал об этом и понял, что прежде, чем говорить об этих абстракциях, необходимо изучить какие-то конкретные алгебры. В следующем году начал с теории комплексных чисел с их геометрической интерпретацией и решением кубических уравнений. На этот раз студенты были более заинтересованы. Но это была не абстрактная алгебра, а приготовление к ней.

Жёсткая версия имеет место, когда преподаватель не понимает, что студенты плохо подготовлены. Печальных примеров такого рода хватает. Одна американская студентка, прикреплённая ко мне на предмет выбора курсов, и очень прилежная на моих занятиях, записалась на курс «современной геометрии», читавшийся другим профессором и вскоре пришла ко мне жаловаться, что никто на этом курсе ничего не понимает. Читал этот курс отличный математик и хороший человек, но педант. Он считал своим святым долгом преподавать в точности то, что было написано в программе: современную, т.е. неевклидову геометрию. Чего этот иностранец не мог себе представить, это того, что все его студенты не имели ни малейшего понятия об евклидовой геометрии как логической системе. Это не редкость, так как типичная установка в американском образовании такая: раз мы не доказываем теорем в повседневной жизни, значит и в школах их доказывать незачем.

Если бы я читал этот курс, я бы начал с евклидовой геометрии, включая аксиомы и доказывая теоремы, объяснил бы стремление Евклида предполагать как можно меньше (современные учёные стремятся к этому же). Затем я перешёл бы к знаменитому пятому постулату и разным попытках доказать его от противного, то есть принять все аксиомы и постулаты Евклида с единственным исключением -- предположить, что пятый постулат неверен, выводить отсюда всяческие следствия и в конце концов придти к противоречию. Как известно, все эти попытки потерпели неудачу, никто не смог получить противоречия. Тупик? Как раз наоборот! Одним из величайших открытий во всей истории математики было проинтерпретировать эту «неудачу» как успех – логическое развитие другой, неевклидовой геометрии, где пятый постулат ложен. Думаю, что эта драма идей очень интересна. Я знал о ней ещё школьником. Каждый раз, читая курс истории математики, я рассказывал эту историю и студенты всегда были заинтересованы.

Положение становится ещё труднее, когда есть сильные и слабые студенты в одной группе. В этом семестре я преподаю статистику будущим инженерам. Результат первой контрольной: огромный разброс оценок, распределённых почти равномерно от нуля до максимума. Это означает, что на моих лекциях сидят бок о бок студенты с хорошими знаниями, которым подошёл бы более продвинутый курс, и студенты совсем неподготовленные, которым нужен был бы элементарный курс по школьной программе. Одни студенты просят включить больше доказательств, другие пререкаются из-за каждой отметки, так как находятся на грани исключения. Но я не могу удовлетворить всех. Я стараюсь адресоваться к большинству студентов, но не знаю, понимает ли меня большинство. На каждой лекции я задаю вопросы и приглашаю всех к доске написать ответ, произвести алгебраическое преобразование, заполнить таблицу или начертить график, но лишь небольшая часть студентов склонны идти к доске, в основном наиболее подготовленные. Большинство боится ошибиться, и недаром: их знания алгебры и построения графиков оставляют желать много лучшего.

Я заметил, что все студенты, плохо сдающие мои курсы, плохо учились и на предыдущих курсах, да и в школе. В одну контрольную я включил задание написать формулы и построить графики функций распределения и плотности одной случайной переменной. У некоторых студентов графики противоречили формулам или плотность была отрицательна или не была производной функции распределения. Это не просто ошибки в основах теории вероятностей: это ошибки на школьном уровне или на уровне первых курсов университета. В другой раз я включил в контрольную двумерную случайную переменную, распределённую равномерно в треугольнике $\{(x,y) : x \leq 1,\ y \geq -1,\ y \leq x\}$. В качестве лёгкого вводного задания я попросил их начертить этот треугольник на координатной плоскости, но это задание оказалось нелёгким. Только немногие сумели его выполнить.

Невозможно обсуждать университетское образование, не говоря о школьном. Мы очень зависим от школы, даже на аспирантском уровне. Школа может и должна включать теоретические вопросы. Фактически это делается в нескольких странах, включая Россию. Однако некоторые американские профессора образования придерживаются противоположного мнения: они утверждают, что молодёжь интересуется только тем, что можно применить в повседневной жизни. Результатом этого является драматическое отставание в развитии абстрактного мышления, без которого невозможно учиться в университете.

В последние десятилетия Бразилия, как и многие другие страны, смотрит на США как на образец для подражания. Это может иметь смысл в ряде отношений, но математика преподаётся в США отвратно. Быть может, главная причина этого – хорошо известная плохая подготовка школьных учителей математики (1). Американское образование страдает от нескольких бед, описанных в нескольких книгах (2). Я сосредоточусь на одной: пренебрежении к структурному характеру математики. Соединённые Штаты – единственная страна в мире, не имеющая национальной программы математического образования. Типичный результат этого – плохая работа тех, кто руководит студентами в выборе курсов, приводящая к тому, что студенты допускаются к курсам, к которым они плохо подготовлены. Некоторые американские образователи этим даже гордятся. Когда я преподавал калькулюс в одном американском университете, обнаружил, что половина моих студентов перескочили через один или два предыдущих курса с одобрения своих советников. Большинство из них провалились на моём курсе.

Какие имеются хорошие примеры для подражания? Согласно TIMSS (3), самому престижному международному исследованию качества математического и научного образования, лучшее школьное математическое образование – в нескольких азиатских странах (Сингапур, Корея, Япония). В нескольких европейских странах, включая Россию, образование тоже хорошее. Я буду говорить о русском образовании, так как хорошо его знаю. Думаю, всё, что я скажу о России, может быть отнесено и к другим странам с хорошим образованием. Согласно всем моим наблюдениям, понимание структурного характера математики очень способствует качеству образования. Калькулюс почти никогда не преподаётся в русских школах, зато когда ученики поступают в университет, они готовы понять университетский курс, потому что очень хорошо знают алгебру и геометрию. Процент американцев, берущих калькулюс в средней школе, -- высочайший в мире, но они к нему плохо подготовлены, потому что большинство из них рвутся в калькулюс в обход решения задач по алгебре и геометрии. Согласно моему опыту университетского преподавателя, обучать американских студентов, бравших калькулюс в школе, труднее, а не легче, потому что они усвоили несколько механических приёмов и думают, что это и есть калькулюс. Простая задача может быть неразрешима для них, например, вычислить

$\int_{-1}^{1} |x|\,dx$ или $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ или $\iint 1\,dx\,dy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$ или $\iint x\,dx\,dy$ в области $|x| + |y| \le 1$.

Почему столь многие американские студенты берут калькулюс в школе? Думаю, что первая причина этого – бедность содержания элементарных курсов. Многие школьные преподаватели в США имеют очень скудное понятие об элементарной математике. Моя дочь всегда интересовалась искусством больше, чем наукой, но когда переехала из России в Америку, была удивлена бедностью содержания на уроках математики. В России уже четырёхклассники решают задачи с несколькими действиями, тогда как в американских школах даже в шестом классе всё ещё решают задачи только с одним действием. Поэтому не приходится удивляться тому, что как только ученик американской школы одолевает основные арифметические и алгебраические операции, администрация не может предложить ему ничего кроме калькулюса. И в большинстве случаев этот калькулюс – не настоящий (4). Большинство школьных учителей плохо подготовлены даже в базовых областях. Несмотря на это, в течение нескольких лет, вместо того чтобы признать необходимость лучшего понимания основ и большего опыта в решении задач, некоторые лидеры американского образования кружили головы школьным учителям фантастическими проектами как, например, сравнивать разные геометрии (без доказательства теорем), преподавать фракталы (безо всякого определения) или преподавать методы статистики, включая хи-квадрат и t Стьюдента (даже не упоминая о непрерывных случайных переменных) (5). Американцы окрестили этот феномен «в милю шириной, в дюйм глубиной» и считают это серьёзным недостатком. Я никогда не слышал этой фразы в Бразилии, а жаль, потому что здесь случается то же самое.

Когда от школы требуют невозможного, она и возможное перестаёт делать. Во многих американских университетах уже существуют обширные программы со школьным содержанием. Они появились как экстренная мера, но затем укрепились и всё растут. Недавно Джим Милграм, профессор математики Станфордского университета, заявил на совещании по вопросам образования: «С 1989 года среди поступающих в систему штатного университета Калифорнии – самая большая штатная система в стране – процент тех, кто был направлен на коррекционные курсы по математике, увеличился почти в два с половиной раза – с 23% в 1989 году до 55% сегодня». Существует афоризм «Американские университеты – самые дорогие средние школы в мире». Это и вправду дорого -- платить университетскую зарплату за преподавание школьного материала. Хотим того же в Бразилии? Думаю, что экономнее будет платить больше школьным учителям, но потребовать, чтобы они выполняли свои обязанности (6). При этом, обязанности школы должны определяться справедливо и реалистично. Мы не должны сваливать на школу или подготовительные курсы наши собственные обязанности. Вообще говоря, калькулюс и линейная алгебра не могут преподаваться в школе. Как объяснить, что такое предел функции при x стремящемся к нулю, без эпсилон и дельта? Говорить, что функция подходит к этому числу очень очень близко когда x подходит очень очень близко к нулю и надеяться, что так сойдёт? А что делать, если возникнут разные мнения? Функция $\sin(1/x)$ подходит очень очень близко к 1 когда x очень очень мал или нет? Никто не знает с уверенностью, потому что вопрос нестрогий.

Что надо изучать в школе? В двух словах: алгебру и геометрию. Эти две дисциплины фундаментальны, достаточно богаты материалом и содержат немало задач, способных заинтересовать будущего учёного. В русских школьных учебниках есть немало интересных задач. Многие русские математики заинтересовались впервые математикой благодаря школьным задачам по алгебре и геометрии (7).

Как школа может на самом деле помочь университету? Обучая решению задач, а также обучая проводить строгие доказательства, потому что в этом сущность математики. Согласно теории Пиаже, большинство детей достигает стадии «формальных операций», то есть последней стадии в его теории, в возрасте около 10-14 лет. Этот возраст – самый подходящий, чтобы начинать обучать доказательствам. Эта возможность фактически используется в образовании в России и некоторых других странах. Когда я учился в русской школе, курс геометрии включал доказательства нескольких теорем. Повидимому, в Бразилии эта природная возможность почти не используется: даже частные и дорогие школы не преподают математику как дедуктивную науку. Даже первые курсы университетов не учат доказывать. Калькулюс обычно преподаётся на интуитивном уровне. Я уже прочёл несколько курсов бразильским аспирантам и обнаружил, что для некоторых из них доказывать -- это что-то новое и непривычное.

Существует много строгих тем и доказательств, которые можно преподавать в школе. Я не могу представить их полного списка, но вот несколько примеров:
1) Евклидова геометрия с доказательством теорем. Ясно, что в школе доказательства не могут быть абсолютно строгими, но тем не менее они очень полезны. Например, дети 12-16 лет могут понять немало доказательств: доказательство теоремы Пифагора (есть несколько её доказательств), пропорциональные отрезки и взаимоотношения между углами и дугами в круге и ещё что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и аналогичные факты для серединных перпендикуляров, высот и медиан.
2) Теория чисел, например: а) Множество простых чисел бесконечно. Это знаменитое доказательство было известно уже Евклиду. в) Признаки делимости: простые на 2, 5, 4, 8 и более сложные на 3, 9 и 11. Изучение целых чисел даёт возможность преподавать алгоритмы, а это отличная подготовка к информатике.
3) а) Определение действительных чисел как бесконечных десятичных дробей. Очень плодотворная дискуссия может возникнуть, если задать следующий вопрос: число 0,999... (бесконечная последовательность девяток после запятой) равно 1 или меньше 1 и если меньше, то насколько?
в) Доказательства иррациональности таких чисел, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, и других. Доказательство того, что когда превращаем рациональное число в десятичную дробь, она будет периодической и что каждая периодическая десятичная дробь представляет рациональное число.
4) Кроме того, необходимо учить разным методам доказательства, включая доказательство от противного и метод математической индукции.

Можем ли мы, профессора университетов, влиять на школы? Несомненно да и более того, не можем не влиять. Мы не должны забывать, что главное требование, которое предъявляется к средним школам – это подготовка к вступительным экзаменам в вузы. Если частная школа этого не делает, она теряет учеников и деньги. Таким образом, подбирая задачи для вступительных экзаменов, мы неизбежно посылаем приказ школам: что изучать. Но влиянию всегда должна сопутствовать ответственность, и мы всегда должны думать о последствиях наших экзаменов. Я посмотрел сборники вступительных задач и нашёл там много неподходящих, чьё место – в университете: задачи на пределы, производные, интегралы, матрицы, определители. Это ошибка. Если все эти темы представлены уже на вступительном экзамене, то почему студенты университета плавают в этом? Потому что присутствие пределов, матриц и других продвинутых тем на вступительных экзаменах – ненужный снобизм. Если посмотрим на сами задачи, то увидим, что все они – лишь поверхностные упражнения. Таким образом, вступительные экзамены пренебрегают элементарной математикой, где есть много полезных и интересных задач, и вместо этого полны поверхностного обезьянничанья университетской математики. В результате абитуриенты тратят время на зубрёжку и приходят в университет, не понимая основных тем элементарной математики. Это я и наблюдаю на университетских курсах. Например, бóльшая часть моих бразильских студентов не может вывести формулы сумм арифметической и геометрической прогрессий. Недавно, объясняя коэффициент корреляции, я спросил у большой группы студентов, при каком условии функция $y=ax^2+bx+c$ неотрицательна при всех значениях x, и никто не ответил. Я уверен, что будущим учёным и инженерам необходимо решать задачи. Что останется от математики без решения задач?

Как избежать эффекта домино? Всегда помнить о структурном характере математики. В математике есть фундамент, без которого изучать её невозможно. В школьной математике это алгебра и геометрия, в университетской математике это калькулюс и линейная алгебра. Ориентировать студентов на систематическую работу курс за курсом, шаг за шагом. Отбросить показуху и снобизм, которые ценят названия больше, чем содержание. Исключить все университетские темы (калькулюс и линейную алгебру) из приёмных экзаменов и включить туда больше задач, требующих думать и доказывать. Поступивших в университет обучать прежде всего двум фундамантальным дисциплинам – калькулюсу и линейной алгебре. И обучать им с определениями, доказательствами и решением задач.

Я благодарю рецензента, чьё имя мне неизвестно, студентку UFPE Андреа Роша и профессора Франциско Крибари, исправлявших мои ошибки в португальском.

(1) Недавно Липинг Ма показала в своей книге «*Знание и преподавание элементарной математики*», что американские учителя начальной школы знают математику хуже, чем китайские девятиклассники. (Liping Ma. *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999.)

(2) Отличная книга: Диана Равич, «*Оставленные позади: сто лет провалов школьных реформ*». (Diane Ravitch. *Left back: a century of failed school reforms,* Simon & Schuster, 2000.)

(3) О TIMSS: **http://timss.bc.edu**

(4) Даже в университетах калькулюс не всегда калькулюс. Помню одну студентку, уже сдавшую салькулюс 1, 2 и 3, которая не могла начертить график $x=-1$. Та же проблема и в других точных науках. Помню другую студентку, уже сдавшую атомную физику, которая не могла начертить график $y=x^2$.

(5) Можете найти все эти предложения в книге «*Программные и оценочные стандарты для школьной математики*» (*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, NCTM, 1989), с. 157, 169. Как это типично для показушных фейерверков, жизнь этих была короткой. В следующей публикации «*Принципы и стандарты для школьной математики*» (*Principles and standards for school mathematics*, NCTM, 2000) все эти предложения были потихоньку удалены, не привлекая внимания.

(6) Недавно я прочитал статью с оптимистическим названием «*Баланс позитивный*», Jornal do Brasil, 17/10/2000, страница 3 о зарплатах школьных учителей. В статье говорится: «С декабря 1997 до июня 2000 зарплата учителя с элементарным образованием поднялась с 165 до 324 реала. Имеющие степень магистра выиграли больше всех: их заработки поднялись с 288 до 504 реала. Для тех, у кого образование неполное, зарплата повысилась со 177 до 295 реалов.» Правительство гордится тем, что зарплаты учителей растут, но я считаю, что все эти зарплаты всё ещё катастрофически малы. Все они ещё должны по меньшей мере удвоиться. (Реал примерно равен десяти рублям.)

(7) Пример: интервью со знаменитым математиком Владимиром Арнольдом (Notices of thr AMS, v. 44, n. 3, pp. 432-438). Арнольд вспоминает следующую задачу: «На восходе солнца два человека вышли одновременно друг другу навстречу из двух городов с постоянными скоростями. Они встретились в полдень и достигли чужого города: первый в 4 часа пополудни, а второй -- в 9 часов вечера. В котором часу был восход солнца?» Арнольд рассказывает, что провёл весь день, думая об этой задаче, и называет это своей первой встречей с настоящей математикой.

Комментарий автора для русского издания. Оригинал статьи опубликован как André Toom. *O efeito domino*. Matemática universitária, n. 30, junho 2001, pp. 5-14. Перевод данной статьи с португальского на руский сделан А.Л. Тоомом.

Автор благодарит А. В. Шевкина за исправление ошибок в русском переводе статьи.

domino.doc